Série d'exercices de Mathématiques :

Étude de fonctions à variable réelle dans $\mathbb{R}$: Énoncé des exercices

Exercice 1

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-3x+5}{x+1}$

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D_f et les limites aux bornes.

   b) Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall\ x \in D_f,\ f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$.

2. a) Montrer que la droite $(\Delta) :\ y = x-4$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b) Étudier la position de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (Δ).

3. Construire $(\mathscr{C}_f)$ ainsi que toutes les asymptotes.

Exercice 2

On donne les fonction de raccordement f et g définies par :

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{x^3}{-x-1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} & \text{si } x > 1 \\ \sqrt{|x^2-x|} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

Dans chacun des cas :

— Déterminer l'ensemble de définition puis les limites aux bornes.
— Étudier la continuité et la dérivabilité aux points de raccordement.
— Calculer les dérivées puis étudier leurs signes.
— Dresser leurs tableaux de variation puis construire leurs courbes représentatives.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x-1}{-x+2}}$

1. Déterminer l'ensemble de définition puis les limites aux bornes.
2. a) Déterminer la dérivée f' de f.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

3. a) Montrer que f réalise une bijection de $\left]\dfrac{1}{4}; 2\right[$ sur un intervalle J à préciser.

   b) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1}. Déterminer $D_{f^{-1}}$.

   c) Expliciter $f^{-1}(x)$.

4. Construire $(\mathscr{C}_f)$ et $\left(\mathscr{C}_{f^{-1}}\right)$ dans un même repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Exercice 4

Soit g la fonction définie $[-1;\ +\infty[$ par $g(x) = 1 - 2\sqrt{x+1}$.

1. Déterminer le signe de $g(x)$.
2. Soit la fonction f définie sur $[-1;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1} - x$.
   a) Montrer que $\forall\ x \in [-1;\ +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{2\sqrt{x+1}}$.
   b) Déterminer les variations de f.
   c) Montrer que 1,25 est un maximum de f.
   d) Montrer que f est une bijection de $[0;\ 3]$ sur $[-1;\ 1]$.
   e) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [0;\ 3]$.
3. Construire $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Exercice 5

Soit la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

1. Montrer que, pour tout x élément de l'ensemble de définition de la fonction f, on a $f(x) > 0$.
2. On donne une fonction g définie par $g(x) = x\sqrt{x^2-1}$.
   a) Donner l'ensemble de définition D_g de la fonction g puis déterminer les limites aux bornes.
   b) Étudier la parité de g.
   c) Donner les points d'intersection de $(\mathscr{C}_g)$ et la droite (D) : $y = x$.
3. Montrer que $\forall\ x \in D_f,\ g'(x) = f(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de g.
5. Soit h la restriction de g sur $[-1,\ +\infty[$. Montrer que h est une bijection de $[-1,\ +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
6. On note h^{-1} la fonction réciproque de h. Construire $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C}_{h^{-1}})$ dans un même repère orthonormé.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{\left|x^2-6x+5\right|}$; $(\mathscr{C}_f)$ est sa courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Exprimer $f(x)$ sans symbole de valeur absolue.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 1 et en 5. Préciser les tangentes en ces points.
3. Étudier les variations de f.
4. Démontrer que la droite d'équation $y = 3$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.
5. Démontrer que les droites (D_1) : $y = x - 3$ et (D_2) : $y = -x + 3$ sont des asymptotes obliques à $(\mathscr{C}_f)$.
6. Déterminer les coordonnées des points A et B, points d'intersection de la courbe avec les deux asymptotes ; A étant le point dont l'abscisse est supérieure à 3.
7. Soit K le point de coordonnée $(3;\ 0)$.
   a) Démontrer que pour tout $x \in [1;\ 5]$, le point $\mathrm{M}(x\,;\ f(x))$ est à une distance constante de K.
   b) En déduire la nature géométrique de $(\mathscr{C}_f)$ lorsque $1 \leq x \leq 5$.
8. Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et ses asymptotes en faisant figurer les points A et B.

Série d'exercices de Mathématiques :

Étude de fonctions à variable réelle dans $\mathbb{R}$: Corrigé des exercices

Exercice 1

$$f(x)=\frac{x^2-3x+5}{x+1}$$

☞ Domaine de définition de la fonction f :

$f \exists \; ssi \; x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$.

Le domaine de définition de la fonction f, D_f est donc :

$$\boxed{D_f =]-\infty;\;-1[\cup]-1;\;+\infty[}$$

☞ Limites aux bornes de D_f :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+5}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+5}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-3x+5}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-}\left(x^2-3x+5\right)=9\\ \lim\limits_{x\to-1^-}(x+1)=\text{"}0^-\text{"}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-3x+5}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^+}\left(x^2-3x+5\right)=9\\ \lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)=\text{"}0^+\text{"}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty}$$

$$\boxed{\text{La droite } (\mathscr{D}_1) : \; x=-1 \text{ est une asymptote verticale à la courbe représentative } \mathscr{C}_f \text{ de } f.}$$

☞ Continuité :

Continuité en -1 :

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, f n'est donc pas continue en -1.

Continuité sur D_f :

Sur $D_f =]-\infty;\;-1[\cup]-1;\;+\infty[$, f est une fonction rationnelle donc continue.

☞ Dérivabilité :

Dérivabilité en -1 :

f n'est pas continue en -1, donc f n'est pas dérivable en -1.

Dérivabilité sur D_f :

Sur $D_f =]-\infty;\;-1[\cup]-1;\;+\infty[$, f est une fonction rationnelle donc dérivable.

☞ Calcul de la dérivée :

$$\forall x \in]-\infty;\;-1[\cup]-1;\;+\infty[,\; f'(x)=\left(\frac{x^2-3x+5}{x+1}\right)'=\frac{(x^2-3x+5)'\times(x+1)-(x+1)'\times(x^2-3x+5)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2x-3)\times(x+1)-(x^2-3x+5)}{(x+1)^2}=\frac{(2x-3)\times(x+1)-x^2+3x-5}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}}$$

☞ Étude du signe de la dérivée :
Le signe de f' dépend de son numérateur ; f' a le même signe que x^2-2x+8.
$x^2-2x+8=0$ ssi $x_1=-4$ ou $x_2=2$ (pour les détails du calcul, revoir le programme de la seconde)
Ce qui conduit aux conclusions suivantes :
$f'(x)>0$ ssi $x\in]-\infty;\ -4[\cup]2;\ +\infty[$, et f est croissante.
$f'(x)<0$ ssi $x\in]-4;\ 2[$, et f est décroissante.
$f'(x)=0$ ssi $x=2 ou x=-4$, la courbe représentative de f, $\mathscr{C}_f$ admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses $x=2$ et $x=-4$.
☞ Autre écriture de l'expression de f :
Montrons que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ où a, b et c sont des réels.
Plusieurs méthodes sont possibles, mais il est plus rapide d'utiliser l'algorithme de Hörner, il faudra cependant préciser que cette méthode ne marche que si le dénominateur de la fonction rationnelle est de degré 1.

	1	−3	5
−1		−1	4
	1	−4	9

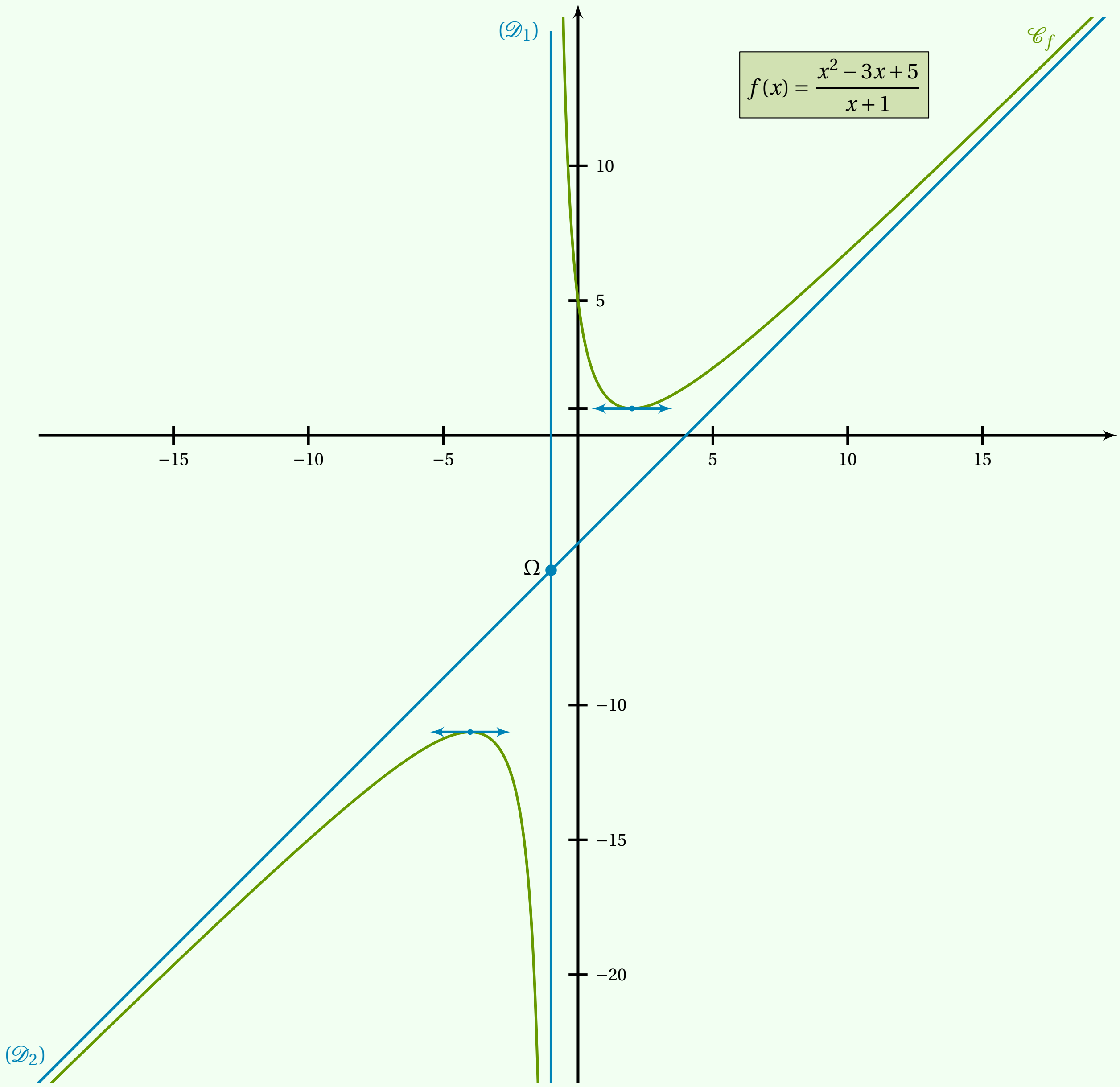
D'où alors $a=1$, $b=-4$ et $c=9$ sont les réels cherchés, ce qui donne $f(x)=x-4+\dfrac{9}{x+1}$
☞ Asymptote oblique :
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x-4)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{9}{x+1}\right]=0.$
$(\mathscr{D}_2)$: $y=x-4$ est une asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
☞ Position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $(\mathscr{D}_2)$:
$x-4-\left(x-4+\dfrac{9}{x+1}\right)=\dfrac{9}{-x-1}>0$ ssi $-x-1>0$ ssi $x<-1$
Dans $]-\infty;\ -1[$, $(\mathscr{D}_2)$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$.
Dans $]-1;\ +\infty[$, $(\mathscr{D}_2)$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$.
☞ Tableau de variation :

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-11	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

☞ Tableau de valeurs :

x	-6	-5	-4	-3	-2	0	1	2	3	4
y	-11,8	-11,25	-11,6	-11,5	-15	5	1,5	1	1,25	1,8

☞ Représentation graphique :



☞ Remarque :
En observant la représentation graphique, on remarque que le point $\Omega(-1;\ -5)$ est un centre de symétrie pour la courbe. La démonstration se fait comme suit :

Théorème :
La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point $\Omega(a;\ b)$ si et seulement si $b = \dfrac{f(x)+f(2a-x)}{2}$.

Pour $f(x) = \dfrac{x^2-3x+5}{x+1}$ et $\Omega(-1;\ -5)$, on obtient :

$$b = \frac{f(x)+f(2\times(-1)-x)}{2} = \frac{\dfrac{x^2-3x+5}{x+1} + \dfrac{(-2-x)^2-3\times(-2-x)+5}{(-2-x)+1}}{2} = \frac{\dfrac{x^2-3x+5}{x+1} - \dfrac{x^2+7x+15}{x+1}}{2}$$

$$b = \frac{\dfrac{-10(x+1)}{x+1}}{2} = \frac{-10\times(x+1)}{2\times(x+1)} = \frac{-10}{2} = -5$$

$\Omega(-1;\ -5)$ est bien un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exercice 2

Fonction f

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ \dfrac{x}{-x-1} & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

☞ Domaine de définition :

La fonction f est définie ssi $-x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$.

Le domaine de définition de la fonction f est donc :

$$\boxed{D_f =]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 0]\cup]0;\ +\infty[}$$

On obtient alors : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{-x-1} & \text{si} \quad x \in]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 0] \\ \dfrac{x}{x+\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in]0;\ +\infty[\end{cases}$

☞ Limites aux bornes de D_f :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{-x-1} = \dfrac{x}{-x} = -1.$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1 \Rightarrow (\mathscr{D}_1) :\ y = -1 \text{ est une asymptote horizontale à la courbe de } f\ \mathscr{C}_f \text{ en } -\infty.}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+\sqrt{x}} = \dfrac{x}{x} = 1.$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Rightarrow (\mathscr{D}_2) :\ y = 1 \text{ est une asymptote horizontale à la courbe de } f\ \mathscr{C}_f \text{ en } +\infty.}$$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x}{-x-1} = \lim\limits_{x\to-1^-} (x) \times \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{1}{-x-1} = -1 \times (+\infty) = -\infty.$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow (\mathscr{D}_3) :\ x = -1 \text{ est une asymptote verticale à la courbe de } f\ \mathscr{C}_f \text{ en } -\infty.}$$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x}{-x-1} = \lim\limits_{x\to-1^+} (-x) \times \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1}{x+1} = 1 \times (+\infty) = +\infty.$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow (\mathscr{D}_3) :\ x = -1 \text{ est une asymptote verticale à la courbe de } f\ \mathscr{C}_f \text{ en } +\infty.}$$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x}{-x-1} = 0.$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0.}$$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{x+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = 0.$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0.}$$

☞ Continuité de f :

$$\boxed{\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) \Rightarrow f \text{ n'est pas continue en } -1.}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow f \text{ est continue en } 0.}$$

$$\boxed{\text{Sur }]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 0[\cup]0;\ +\infty[,\ f \text{ est continue comme composition de fonctions continues.}}$$

☞ Dérivabilité de f :

$$\boxed{f \text{ n'est pas continue en } -1 \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en } -1.}$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \dfrac{x}{x(-x-1)} = \dfrac{1}{-x-1} & \text{si} \quad x \in]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 0[\\ \dfrac{x}{x(x+\sqrt{x})} = \dfrac{1}{x+\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in]0;\ +\infty[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{-x-1} = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}, \text{ donc, } f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$

$$\boxed{\text{Sur }]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 0[\cup]0;\ +\infty[,\ f \text{ est dérivable comme composition de fonctions dérivables.}}$$

☞ Remarque :

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente d'équation $y = -x$ à gauche de 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale à droite de 0.

Donc $\mathscr{C}_f$ admet un point de rebroussement en 0.

☞ Calcul des dérivées :

Si $x \in]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 0[$, $f(x) = \dfrac{x}{-x-1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-x-1+x}{(-x-1)^2} = \dfrac{-1}{(-x-1)^2}$

Si $x \in]0;\ +\infty[$, $f(x) = \dfrac{x}{x+\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}-x\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x+\sqrt{x})^2} = \dfrac{x+\sqrt{x}-x-\dfrac{x\sqrt{x}}{2x}}{(x+\sqrt{x})^2} = \dfrac{\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^2}$.

$$\boxed{\text{Si } x \in]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 0[,\ f'(x) = \frac{-1}{(-x-1)^2}\text{; si } x \in]0;\ +\infty[,\ f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^2}.}$$

☞ Signe de la dérivée :

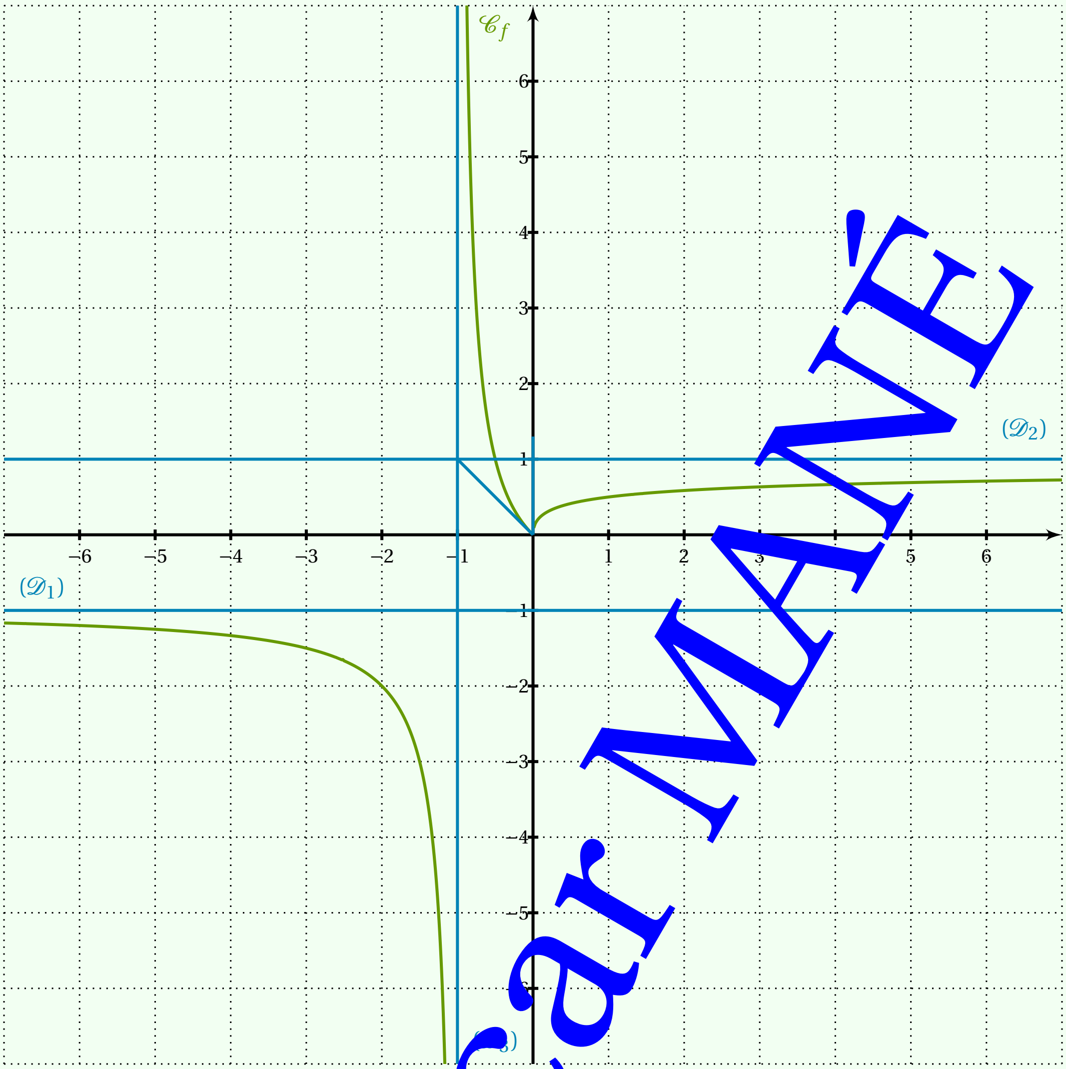
Sur $x \in]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 0[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(-x-1)^2} < 0$ donc f est strictement décroissante.

Si $x \in]0;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^2} > 0$, alors f est strictement croissante sur $]0;\ +\infty[$.

☞ Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	1

☞ Représentation graphique :



Fonction g

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{|x^2-x|} & \text{si} \quad x\leq 1\\[2mm] \dfrac{x^2-1}{x-2} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

☞ Domaine de définition de la fonction g :

- Écrivons la fonction g sans barres de valeur absolue :

x^2-x s'annule pour $x=0$ et pour $x=1$, ce qui donne le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-1$	$-$	|	$-$	0	$+$
x^2-x	$+$	0	$-$	0	$+$
$\|x^2-x\|$	x^2-x	0	$-x^2+x$	0	

- Condition d'existence de $\dfrac{x^2-1}{x-2}$:

$\dfrac{x^2-1}{x-2}$ $\exists$ ssi $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$.

La condition d'existence de la fonction g est donc :

$$\boxed{D_g=]-\infty;\ 0[\cup[0;\ 1]\cup]1;\ 2[\cup]2;\ +\infty[}$$

On obtient donc : $g(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-x} & \text{si} \quad x\in\ ]-\infty;\ 0[\\[2mm] \sqrt{-x^2+x} & \text{si} \quad x\in\ [0;\ 1]\\[2mm] \dfrac{x^2-1}{x-2} & \text{si} \quad x\in\ ]1;\ 2[\cup]2;\ +\infty[\end{cases}$

☞ Limites aux bornes de D_f :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}|x|\times\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)\times\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=(+\infty)\times(1)=+\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty.$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty}$$

$\lim\limits_{x\to0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{x^2-x}=0.$

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{-x^2+x}=0.$

$$\boxed{\lim_{x\to0^-} g(x)=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^+} g(x)=0}$$

$\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{-x^2+x}=0.$

$\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-2}=0.$

$$\boxed{\lim_{x\to1^-} g(x)=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to1^+} g(x)=0}$$

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \left(x^2-1\right) \times \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = 3\times(-\infty) = -\infty.$$
$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \left(x^2-1\right) \times \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = 3\times(+\infty) = +\infty.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 2^-} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty}$$

La droite $(\mathscr{D}_1)$: $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de g.

☞ Continuité de g :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0) = 0 \Rightarrow g \text{ est continue en } 0.}$$
$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = g(1) = 0 \Rightarrow g \text{ est continue en } 1.}$$
$$\boxed{\lim_{x\to 2^-} g(x) \neq \lim_{x\to 2^+} g(x) \Rightarrow g \text{ n'est continue en } 2.}$$

Sur $\mathbb{R} - \{0;\ 1;\ 2\}$, g est continue comme composition de fonctions continues.

☞ Dérivabilité de g :

- Dérivabilité en 0 :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(-x)\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{-x^2+x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x)\sqrt{-1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{-1+\frac{1}{x}}\right) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}, \ g \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$

Au point d'abscisse $x_0 = 0$ on a un point de rebroussement.

- Dérivabilité en 1 :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{-x^2+x}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{-x^2+x}\times\sqrt{-x^2+x}}{(x-1)\times\sqrt{-x^2+x}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x\times(x-1)}{(x-1)\times\sqrt{-x^2+x}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x}{\sqrt{-x^2+x}}$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (-x) \times \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{-x^2+x}} = (-1)\times -\infty = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x^2-1}{x-2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-2} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \neq \lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}, \ g \text{ n'est pas dérivable en } 1.}$$

Au point d'abscisse $x_0 = 1$ on a un point anguleux.

- Dérivabilité en 2 :

g n'est pas continue en 2, donc g n'est pas dérivable en 2.

Sur $\mathbb{R}\backslash\{0;\ 1;\ 2\}$, g est dérivable comme composition de fonctions dérivables.

☞ Calcul de la fonction dérivée de g :

- Fonction dérivée de g sur $]-\infty;\ 0[$:

Sur $]-\infty;\ 0[$, $g(x)=\sqrt{x^2-x} \Rightarrow g'(x)=\left(\sqrt{x^2-x}\right)'=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$.

- Fonction dérivée de g sur $]0;\ 1[$:

Sur $]0;\ 1[$, $g(x)=\sqrt{-x^2+x} \Rightarrow g'(x)=\left(\sqrt{-x^2+x}\right)'=\dfrac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}}$.

- Fonction dérivée de g sur $]1;\ 2[\cup]2;\ +\infty[$:

Sur $]1;\ 2[\cup]2;\ +\infty[$, $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2} \Rightarrow g'(x)=\left(\dfrac{x^2-1}{x-2}\right)'=\dfrac{2x(x-2)-(x^2-1)}{(x-2)^2}=\dfrac{2x^2-4x+1}{(x-2)^2}$.

$$\text{On a alors : } g'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} & \text{si } x\in\ ]-\infty;\ 0[\\[2ex] \dfrac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}} & \text{si } x\in\ ]0;\ 1[\\[2ex] \dfrac{2x^2-4x+1}{(x-2)^2} & \text{si } x\in\ ]1;\ 2[\cup]2;\ +\infty[\end{cases}$$

☞ Signe de la dérivée et sens de variation de la fonction g :

Si $x\in\ ]-\infty;\ 0[$, $g'(x)=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ et $g'(x)\le 0$ si et seulement si $\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}\le 0$

si et seulement si $2x-1\le 0 \Rightarrow x\le\dfrac{1}{2}$

Sur $]-\infty;\ 0[$, $g'<0$ et g est strictement décroissante.

Si $x\in\ ]0;\ 1[$, $g'(x)=\dfrac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}}$ et $g'(x)\le 0$ si et seulement si $\dfrac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}}\le 0$

si et seulement si $-2x+1\le 0 \Rightarrow x\ge\dfrac{1}{2}$

Sur $\left]0;\ \dfrac{1}{2}\right[$, $g'>0$ et g est strictement croissante.

Sur $\left]\dfrac{1}{2};\ 1\right[$, $g'<0$ et g est strictement décroissante.

$g'(x)=0$ si $x=\dfrac{1}{2}$, on a une tangente horizontale en $P_1\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Si $x\in\ ]1;\ 2[\cup]2;\ -\infty[$, $g'(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ et $g'(x)\ge 0$ si et seulement si $\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}\ge 0$

si et seulement si $x^2-4x+1\ge 0$.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-4x+1		$+$	0	$-$	⋮	$-$	0	$+$	

Sur $]1;\ 2[\cup]2;\ 2+\sqrt{3}[$, $g'<0$ et g est strictement décroissante.

Sur $]2+\sqrt{3};\ +\infty[$, $g'>0$ et g est strictement croissante.

$g'(x)=0$ si $x=2+\sqrt{3}$, on a une tangente horizontale en $P_2\left(2+\sqrt{3};\ 4+2\sqrt{3}\right)$.

☞ Étude des branches paraboliques :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\times\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\times\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=-1.$$

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x)-(-1\times x)]=\lim_{x\to-\infty}[g(x)+x]=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)\times\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)}{\sqrt{x^2-x}-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x)+x]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-x^2}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x)+x]=\frac{-x}{-x(\sqrt{1-0}+1)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[g(x)-\left(-x+\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}[g(x)+x-\frac{1}{2}]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left[g(x)-\left(-x+\frac{1}{2}\right)\right]=0,\ (\mathscr{D}_3):\ y=-x+\frac{1}{2}\text{ est une asymptote oblique à }\mathscr{C}_f\text{ en }-\infty.}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x\times(x-2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x-2}-\frac{x^2-2x}{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2+2x}{x-2}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-2}=\frac{2x}{x}=2$$

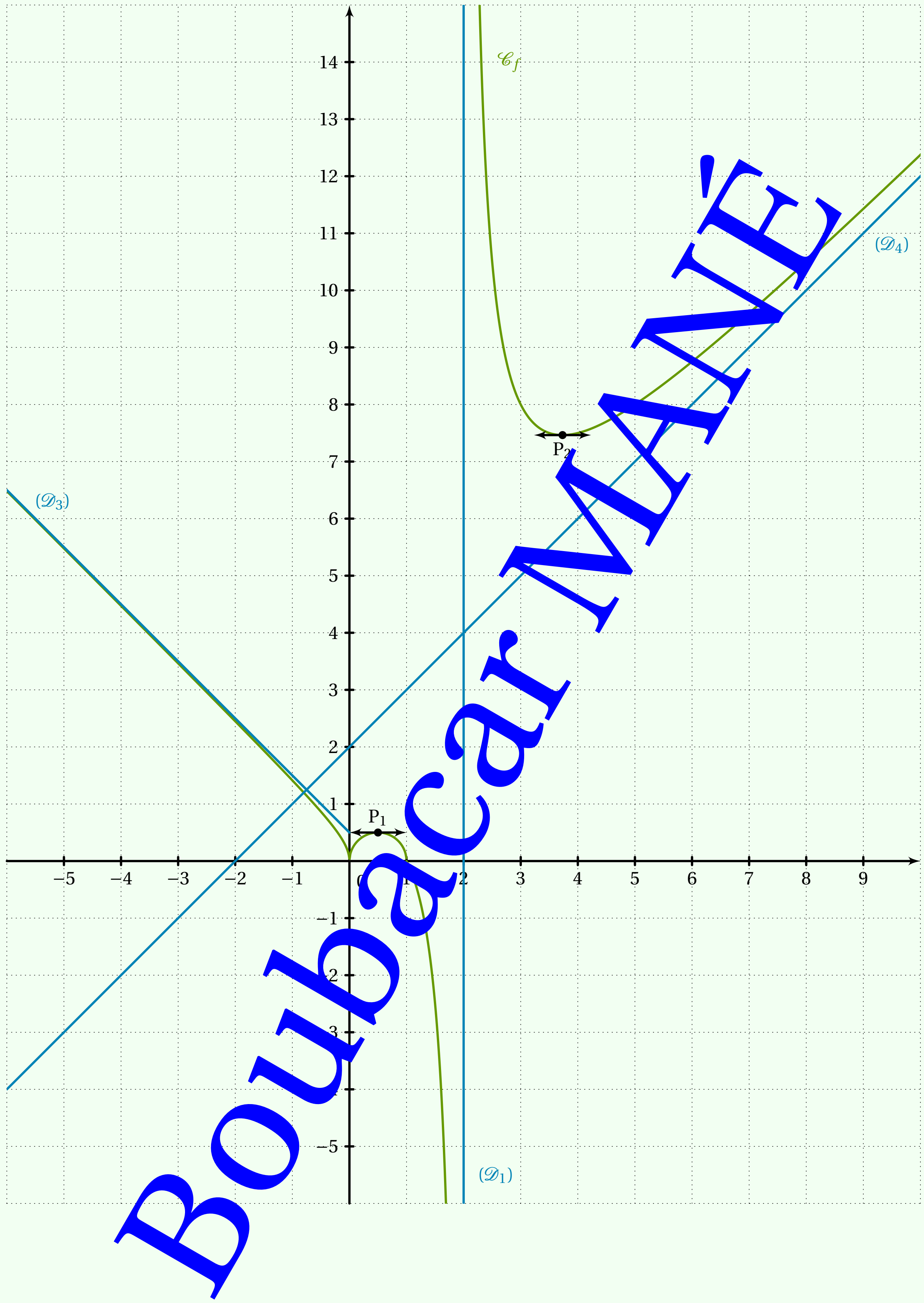
$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)-(x+2)]=\lim_{x\to+\infty}[g(x)-x-2)]=\lim_{x\to+\infty}[g(x)-x]-2=2-2=0.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\big[g(x)-(x+2)\big]=0,\ (\mathscr{D}_4):\ y=x+2\text{ est une asymptote oblique à }\mathscr{C}_f\text{ en }+\infty.}$$

☞ Tableau de variation de la fonction g :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
g'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2\sqrt{3}+4$	↗	$+\infty$

☞ Représentation graphique de la fonction g :



Baccalauréat Série S_2 Juillet 2013

PROBLÈME

Les résultats de la partie A seront utiles dans la partie B.

PARTIE A

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x} = 0$.

2) Soit $k :]0;\ +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x(1 - ln(x))$$

a) k est-elle continue sur $]0;\ +\infty[$? Justifier la réponse.

b) Soit $K :]0;\ +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 ln(x)$$

Vérifier que K est une primitive de k dans $]0;\ +\infty[$.

PARTIE B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$(unité graphique 2 cm).

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x\,ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Déterminer D_f, le domaine de définition de f. Puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2) a) Étudier la continuité de f en 0.

b) Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter géométriquement les résultats.

3) Donner les domaines de continuité et de dérivabilité de f.

4) Calculer la dérivée de f sur son domaine d'existence et étudier son signe.

5) Dresser le tableau de variation de f.

6) Montrer que la droite (Δ) d'équation : $y = -x - 1$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f dans $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$quand x tend vers $-\infty$.

7) Préciser la nature de la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ quand x tend vers $+\infty$.

8) Représenter graphiquement la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Préciser l'allure de la courbe au point d'abscisse 0 et tracer Δ.

9) Soit h la restriction de f à $\left[\frac{1}{e};\ +\infty\right[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e};\ +\infty\right[$ sur un intervalle J à préciser.

b) Représenter graphiquement $(\mathscr{C}_{h^{-1}})$, la courbe représentative de h^{-1} dans $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$à l'aide de $(\mathscr{C}_f)$.

10) Soit $(\mathscr{A}_1)$ l'aire du domaine du plan délimité par $x = \frac{1}{e}$, $x = e$, la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x$.

a) Calculer $(\mathscr{A}_1)$.

b) En déduire l'aire $(\mathscr{A}_2)$ du domaine du plan délimité par les droites d'équations respectives : $x = -\frac{1}{e}$, $y = \frac{1}{e}$, la droite $(\mathscr{D})$ et la courbe $(\mathscr{C}_{h^{-1}})$.

Baccalauréat Série S$_2$ Juillet 2013 Corrigé

PARTIE A

1) Montrons que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x} = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1-1 = 0.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x} = 0}$$

2) a) Sur $]0;\ +\infty[$, k est définie comme étant la somme de deux fonctions puissance et logarithme continues, k est donc continue.

$$\boxed{k \text{ est continue sur }]0;\ +\infty[}$$

b) Vérifions que K est une primitive de k dans $]0;\ +\infty[$.

1$^{\text{ère}}$ Méthode (Plus simple)	2$^{\text{ème}}$ Méthode
$K'(x) = \frac{2\times 3}{4}x - \frac{1}{2}\left(2x\times ln(x) + \frac{x^2}{x}\right)$ $K'(x) = \frac{3x}{2} - xln(x) - \frac{x}{2}$ $K'(x) = x - xln(x) = k(x)$ $K'(x) = k(x)$	$\int k(x)dx = \int (x - xln(x))dx$ $= \int xdx - \int xln(x)dx$ $= \left[\frac{x^2}{2}\right] - \int xln(x)dx$ On pose $u = ln(x) \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$ et $v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$, on obtient : $\int k(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right] - \left[\frac{x^2}{2}ln(x)\right] + \int \frac{1}{2}x\,dx$ $\int k(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right] - \left[\frac{x^2}{2}ln(x)\right] + \left[\frac{x^2}{4}\right]$ $\int k(x)dx = \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2ln(x)\right] + C, C\in\mathbb{R}$ $\int k(x)dx = [K(x)] + C, C\in\mathbb{R}$

$$\boxed{K \text{ est donc une primitive de } k \text{ sur }]0;\ +\infty[.}$$

PARTIE B

f est définie par $f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1 & \text{si } x \le 0 \\ xln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Déterminons D_f, le domaine de définition de f. Puis calculons les limites de f aux bornes de D_f.
$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)$ existe, l'ensemble de définition de la fonction f est donc $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\exists,\ D_f =]-\infty;\ +\infty[.}$$

$$\lim_{x\to-\infty} = f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^x - x - 1) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} = f(x) = \lim_{x\to+\infty} xln(x) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} = f(x) = \lim_{x\to+\infty} = f(x) = +\infty.}$$

2) a) Étudions la continuité de f en 0.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(e^x - x - 1) = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(xln(x)) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2ln(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left[x^2\times\frac{ln(x)}{x}\right] = 0\times 0 = 0$$

$f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0,\ f \text{ est donc continue en } 0.}$$

b) Étudions la dérivabilité de f en 0 et interprétation géométrique du résultat.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \frac{e^x-x-1}{x} & \text{si } x\le 0 \\ ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-x-1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x} \ne \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} \text{ alors } f \text{ n'est donc pas dérivable en } 0.\\ \text{Au point } O(0;\ 0)\text{, la courbe de } f \text{ admet deux demi-tangentes d'équations } x = 0 \text{ et } y = 0.\end{array}}$$

3) Domaines de continuité et de dérivabilité de f.

f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ comme composition de fonctions dérivables.

$\boxed{\text{D'après ce qui précède, } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et dérivable sur } \mathbb{R}\setminus\{0\}}$

4) Calcul de la dérivée de f et étude du signe de la dérivée.

$$f'(x) = \begin{cases} (e^x - x - 1)' = e^x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ [x\,ln(x)]' = ln(x) + \frac{1}{x} = ln(x) + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sur $]-\infty;\ 0]$, $f'(x) \leq 0$ si et seulement si $e^x - 1 \leq 0 \Rightarrow e^x \leq 1 \Rightarrow x \leq e$

Donc sur $]-\infty;\ 0]$, $f'(x) \leq 0$ car $\forall x \in]-\infty;\ 0]$, $x \leq e$ et la fonction f est décroissante $]-\infty;\ 0]$.

Sur $]0;\ +\infty[$, $f'(x) \leq 0$ si et seulement si $ln(x) + 1 \leq 0 \Rightarrow ln(x) \leq -1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{e}$.

Donc sur $\left]0;\ \frac{1}{e}\right[$, $f'(x) \leq 0$ et la fonction f est décroissante, sur $\left[\frac{1}{e};\ +\infty\right[$, $f'(x) \geq 0$ et la fonction f est décroissante.

$f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$, la courbe de f admet un minimum au point de coordonnées $\left(\frac{1}{e};\ f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$, c'est-à-dire le point de coordonnées $\left(\frac{1}{e};\ -\frac{1}{e}\right)$.

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \leq 0 \quad f' \leq 0 \quad \text{et} \quad f \searrow \\ ln(x) + 1 & \text{si } x \in \left]0;\ \frac{1}{e}\right[\quad f' \leq 0 \quad \text{et} \quad f \searrow;\ \text{si } x \in \left[\frac{1}{e};\ +\infty\right[\quad f' \geq 0 \quad \text{et} \quad f \nearrow \end{cases}}$$

5) Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

6) Montrons que la droite (Δ) d'équation : $y = -x - 1$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f dans $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ quand x tend vers $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-x-1) = \lim_{x\to-\infty} (e^x - x - 1 + x + 1) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

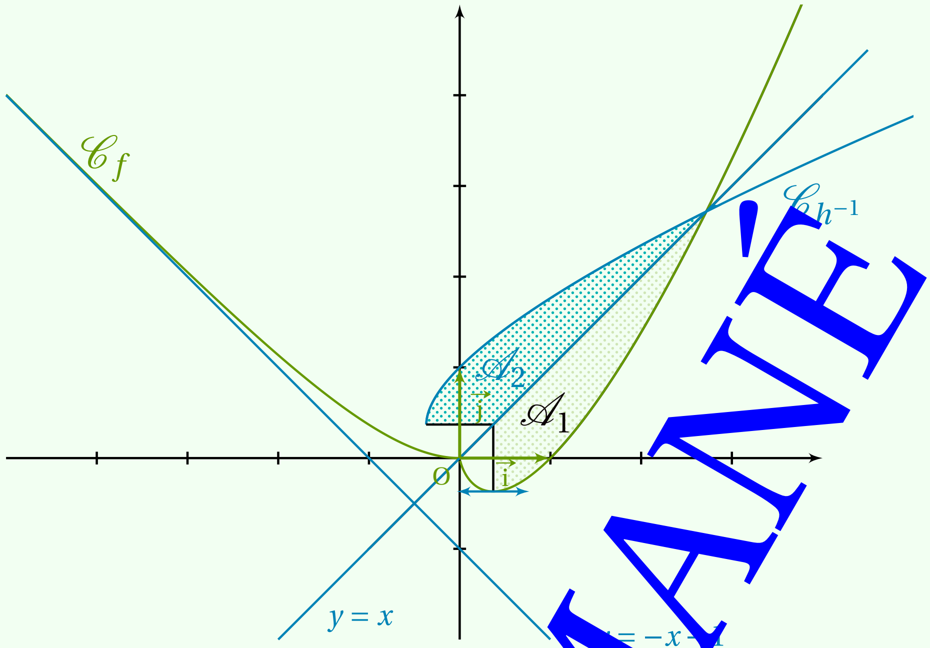
$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-x-1) = 0 \text{; la droite } (\Delta) \text{ d'équation : } y = -x-1 \text{ est une asymptote à la courbe } (\mathscr{C}_f) \text{ de } f \text{ dans } \left(O;\vec{i},\vec{j}\right) \text{ quand } x \text{ tend vers } -\infty.}$

7) Nature de la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ quand x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\,ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,\ (\mathscr{C}_f) \text{ a une branche parabolique de direction } [Oy)}$$

8) Représentation graphiquement la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.



Au point d'abscisse 0, on a un point de rebroussement.

9) a) Montrons que h réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$ sur un intervalle J.

f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$, donc h réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$ sur $J=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right[$.

10) a) Calcul de $(\mathscr{A}_1)$.

$\frac{\mathscr{A}_1}{U_a} = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} xln(x)dx + \int_{\frac{1}{e}}^{e} xdx - \int_{1}^{e} xln(x)dx$

$\frac{\mathscr{A}_1}{U_a} = \int_{\frac{1}{e}}^{e} xdx - \int_{\frac{1}{e}}^{e} xln(x)dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} [x - xln(x)]\,dx$. Or $x - xln(x) = k(x)$, et $K(x)$ est une primitive de $k(x)$, ce qui donne alors : $\frac{\mathscr{A}_1}{U_a} = \int_{\frac{1}{e}}^{e} k(x)dx = [K(x)]_{\frac{1}{e}}^{e}$

$\frac{\mathscr{A}_1}{U_a} = \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 ln(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$ or $U_a = 4cm^2$, on a alors : $\mathscr{A}_1 = \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 ln(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{e} \times 4cm^2$

$\mathscr{A}_1 = \left[3x^2 - 2x^2 ln(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{e} cm^2 = \left[3e^2 - 2e^2 ln(e) - 3ln\left(\frac{1}{e}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{e}\right)^2 ln\left(\frac{1}{e}\right)\right] cm^2$

$\mathscr{A}_1 = \left[3e^2 - 2e^2 - \frac{3}{e^2} + \frac{2}{e^2}\times(-1)\right] cm^2 = \left(e^2 - \frac{3}{e^2} - \frac{2}{e^2}\right) cm^2 = \left(e^2 - \frac{5}{e^2}\right) cm^2$

$$\boxed{\mathscr{A}_1 = \left(e^2 - \frac{5}{e^2}\right) cm^2}$$

b) Déduction de l'aire $(\mathscr{A}_2)$:

Par symétrie par rapport à la première bissectrice,on a :

$$\boxed{\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 = \left(e^2 - \frac{5}{e^2}\right) cm^2}$$